УДК 514.7

А. И. Долгарев, Е. В. Зелева

РАСТРАН С 2-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Операциями над тройками действительных чисел с двумя ведущими компонентами вводится 3-мерный растран, называемый **W**-растраном. Получено представление **W**-растрана матрицами и аффинными преобразованиями. Найден генетический код **W**-растрана. Определена галилеева норма на **W**-растране с 2-мерным временем. Найдена формула дифференцирования растранных функций. В пространстве с **W**-растраном получены уравнения прямых и двух видов параллельных прямых.

Растран является одулем Ли, обобщающим линейное пространство. Векторы линейного пространства можно интерпретировать как параллельные переносы аффинного пространства. Параллельный перенос всякую прямую аффинного пространства отображает на параллельную ей прямую. Таким же свойством обладают еще только гомотетии аффинного пространства. Множество всех параллельных переносов и гомотетий относительно композиции преобразований составляет группу, она называется основной аффинной группой и является группой Ли. Определяя на группе Ли внешнюю операцию умножения элементов группы Ли на действительные числа, получаем одуль Ли. Одуль Ли на основной аффинной группе называется растраном, определен в 1986 г. [1]. Имеется несколько видов растранов.

Существует два вида 2-мерных одулей Ли: линейное пространство и растран. 3-мерных одулей Ли несколько больше. Существует пять видов 3-мерных разрешимых одулей Ли [2], а 3-мерных растранов имеется четыре вида, они перечислены ниже (есть 3-мерные одули Ли, не являющиеся ни линейным пространством, ни растраном).

Заменяя линейное пространство одулем Ли в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства, можно определить вейлевское одулярное пространство (ВО-пространство). По аналогии с векторными функциями определяются одулярные функции, зависящие от одного или нескольких параметров. Если на одуле Ли введена норма, то появляется возможность определить производную одулярной функции по аналогии с производной векторных функций. На одулях Ли в [2] введена галилеева норма и найдены производные некоторых одулярных функций. В схеме Г. Вейля построена дифференциальная геометрия одулярных галилеевых пространств [2].

1 W-растран. Дифференцирование растранных функций

1.1 Трехмерные растраны

3-мерный растран может быть задан на многообразии $\mathbf{R}^3$ операциями над тройками чисел. Элементы растрана называются растами, обозначаются греческими буквами и записываются в виде $\rho=(x,x^1,x^2)$. Имеется четыре вида 3-мерных растранов. Перечислим их.

Растран общего вида. Операции:

$$(x,x^1,x^2)+(y,y^1,y^2)=(x+y,\ x^1e^{-y}+y^1,x^2e^{y}+y^2);$$

$$t\left(x,x^1,x^2\right)=\left(xt,\ x^1\frac{e^{-xt}-1}{e^{-x}-1},x^2\frac{e^{xt}-1}{e^{x}-1}\right),x\neq 0\ ;\ t(0,x^1,x^2)\ =\left(0,x^1t,x^2t\right),\ t\in\mathbf{R}\ .$$

Нулевой раст: $\vartheta=(0,0,0)$; раст, противоположный расту $\rho=(x,x^1,x^2)$, равен

$$-\rho=-\left(x,x^1,x^2\right)=\left(-x,-x^1e^{x},-x^2e^{-x}\right).$$

Растран однородный. Обозначение $\mathbf{P}^3$, операции:

$$\left(x,x^1,x^2\right)\ +\ \left(y,y^1,y^2\right)\ =\ \left(x+y,\ x^1e^{y}+y^1,x^2e^{y}+y^2\right);$$

$$t\left(x,x^1,x^2\right)=\left(xt,\ x^1\frac{e^{xt}-1}{e^{x}-1},x^2\frac{e^{xt}-1}{e^{x}-1}\right),x\neq 0\ ;\ t\left(0,x^1,x^2\right)=\left(0,x^1t,x^2t\right),$$

$$t\in\mathbf{R}\ ;-\rho=\left(-x,-x^1e^{-x},-x^2e^{-x}\right).$$

***V**-растран.* Обозначение $\mathbf{P}^3_V$, операции:

$$\left(x,x^1,x^2\right)+\left(y,y^1,y^2\right)=\left(x+y,\ x^1e^{-y}+y^1,x^2+y^2\right);$$

$$t\left(x,x^1,x^2\right)=\left(xt,\ x^1\frac{e^{-xt}-1}{e^{-x}-1},x^2t\right),\ x\neq 0\ ;\ t\left(0,x^1,x^2\right)\ =\left(0,x^1t,x^2t\right),\ t\in\mathbf{R}\ ;$$

$$-\rho=\left(-x,-x^1e^{x},-x^2\right).$$

***W**-растран.* Обозначение $\mathbf{P}^3_W$, операции:

$$\left(x^1,x^2,x\right)+\left(y^1,y^2,y\right)=\left(x^1+y^1,\ x^2+y^2,xe^{y^1+y^2}+y\right);\qquad(1)$$

$$t\left(x^1,x^2,x\right)=\left(x^1t,\ x^2t,x\frac{e^{(x^1+x^2)t}-1}{e^{x^1+x^2}-1}\right),\ x^1+x^2\neq 0\ ,$$

$$t\left(x^1,x^2,x\right)=\left(x^1t,x^2t,xt\right),\ x^1+x^2=0\ ,\ t\in\mathbf{R}\ .\qquad(2)$$

$$-\rho=\left(-x^1,-x^2,-xe^{-x^1-x^2}\right).$$

Третья компонента результатов операций над растами зависит от первой и второй компонент. Поэтому они являются ведущими компонентами растов.

Из этих четырех растранов ниже рассматривается **W**-растран $\mathbf{P}^3_W$.

Каждый раст $\rho = \left(x^1, x^2, x\right)$ однозначно представляется в виде разложения

$$\rho = \left(x^1, x^2, x\right) = x^1(1,0,0) + x^2(0,1,0) + x(0,0,1) .$$

Обозначим:

$$(1,0,0) = \alpha ,\ (0,1,0) = \beta ,\ (0,0,1) = \gamma .$$

Расты α, β, γ составляют *базис* **W**-растрана; для всякого раста

$$\rho = x^1\alpha + x^2\beta + x\gamma .$$

Базис **W**-растрана обозначаем **Б** = (α, β, γ).

Числа x^1, x^2, x называются координатами раста ρ в базисе **Б**.

1.2 Генетический код W-растрана

Коммутатор растов, как коммутатор элементов группы, равен

$$[\omega, \upsilon] = -\omega - \upsilon + \omega + \upsilon .$$

Вычислим коммутаторы базисных растов α, β, γ:

$$[\beta, \alpha] = -(0,1,0) - (1,0,0) + (0,1,0) + (1,0,0) = (0,-1,0) + (-1,0,0) + (0,1,0) + (1,0,0) =$$

$$= (-1,-1,0) + (1,1,0) = (0,0,0) = \vartheta ;$$

$$[\gamma, \alpha] = -(0,0,1) - (1,0,0) + (0,0,1) + (1,0,0) = (e-1)\gamma ,\ [\gamma, \beta] = (e-1)\gamma .$$

Запишем генетической код **W**-растрана:

$$\mathbf{P}_W^3 = \left\langle \alpha, \beta, \gamma \middle| [\beta, \alpha] = \vartheta,\ [\gamma, \alpha] = [\gamma, \beta] = (y-1)\gamma \right\rangle .$$

1.3 Галилеева норма на W-растране

Галилеевой нормой $\|\rho\|$ раста $\rho = (x^1, x^2, x)$ называется

$$\|\rho\| = \left|x^1 + x^2\right|, \text{ если } x^1 + x^2 \neq 0 ;$$

$$\|\rho\| = |x|, \text{ если } x^1 + x^2 = 0 .$$

Временными компонентами растов считаем первую и вторую, третью компоненту считаем пространственной. Настоящая норма определяет растран с 2-мерным временем. Здесь использовано то, что первые две компоненты растов являются ведущими в операциях на растране.

1.4 Растранная функция. Дифференцирование

Отображение из поля $\mathbf{R}$ в **W**-растран называется растранной функцией. Пусть I – некоторый интервал в $\mathbf{R}$, или $I = \mathbf{R}$. Всякому $t \in I$ соответствует единственный раст $\rho = \left(x^1, x^2, x\right)$. При изменении t в интервале I изменяется соответствующий раст: $\rho(t) = (x^1(t), x^2(t), x(t))$. **W**-растранная функция $\rho(t)$ есть упорядоченная тройка действительных функций действительного параметра t. Всякая упорядоченная тройка действительных функций действительного параметра с общей областью определения является **W**-растранной функцией:

$$\left(x^1(t), x^2(t), x(t)\right),\ t \in I \subseteq \mathbf{R}.$$

Пусть t – фиксированное значение параметра из интервала I; h – приращение параметра t. Приращенное значение функции $\rho(t)$ равно

$$\rho(t+h) = \rho(t) + \Delta\rho.$$

Отсюда находим приращение функции, учитывая некоммутативность внутренней операции на **W**-растране:

$$\Delta\rho = -\rho(t) + \rho(t+h).$$

Наличие нормы и внешней операции на **W**-растране позволяет традиционно определить производную **W**-растранной функции $\rho(t)$:

$$\rho'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(-\rho(t) + \rho(t+h)\right).$$

Найдем производную функцию на **W**-растране.

Рассмотрим **W**-растранную функцию $\rho(t) = \left(x^1(t), x^2(t), x(t)\right)$. Действительные функции $x^1(t), x^2(t), x(t)$ в окрестности точки t считаем хотя бы один раз дифференцируемыми.

Подсчитаем приращение $\Delta\rho = -\rho(t) + \rho(t+h)$ функции $\rho(t)$ в точке t на основе операций над растами в **W**-растране:

$$\Delta\rho = -(x^1(t), x^2(t), x(t)) + (x^1(t+h), x^2(t+h), x(t+h)) =$$

$$= (-x^1(t), -x^2(t), -e^{-x^1(t)-x^2(t)}x(t)) +$$

$$+ (x^1(t+h), x^2(t+h), x(t+h)) = (x^1(t+h) - x^1(t), x^2(t+h) - x^2(t),$$

$$x(t+h) - x(t)e^{-x^1(t)+x^1(t+h)-x^2(t)+x^2(t+h)}).$$

Если $h \to 0$, то и $\Delta\rho \to 0$. Умножим раст $\Delta\rho$ на число $1/h$:

$$\frac{\Delta\rho}{h} = \left(\frac{x^1(t+h) - x^1(t)}{h}, \frac{x^2(t+h) - x^2(t)}{h}, \frac{e^{(x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t))/h} - 1}{e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)} - 1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(x(t+h) - x(t)e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)} \right)\right).$$

Согласно [2] предел одулярной функции вычисляется покомпонентно. Вычислим предел полученного раста. В первой и второй координатах получим соответственно функции $x'^1(t)$ и $x'^2(t)$. Для третьей координаты найдем

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}}{e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}-1}.$$

Так как

$$\lim_{h\to 0}\left(x(t+h)-x(t)e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}\right)=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\left(e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}-1\right)=0,$$

то можно воспользоваться правилом Лопиталя. Здесь $x(t+h)$ – функция от h; $x(t)$ – постоянная величина. Получаем:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}}{e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}-1}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{x'(t+h)}{e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}(x'^1(t+h)+x'^2(t+h))}-\right.$$

$$\left.-\frac{x(t)e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}\left(x'^1(t+h)+x'^2(t+h)\right)}{e^{x^1(t+h)-x^1(t)+x^2(t+h)-x^2(t)}\left(x'^1(t+h)+x'^2(t+h)\right)}\right)=$$

$$=\frac{x'(t)-x(t)\left(x'^1(t)+x'^2(t)\right)}{x'^1(t)+x'^2(t)}=\frac{x'(t)}{x'^1(t)+x'^2(t)}-x(t).$$

Следовательно, производная функция $\rho'(t)$ **W**-растранной функции $\rho(t)$ такова:

$$\rho'(t)=\left(x'^1(t),x'^2(t),\left(e^{x'^1(t)+x'^2(t)}-1\right)\left(\frac{x'(t)}{x'^1(t)+x'^2(t)}-x(t)\right)\right).$$

В частности,

$$(c,x^2(t),x(t))'=\left(0,x'^2(t),\left(e^{x'^2(t)}-1\right)\left(\frac{x'(t)}{x'^2(t)}-x(t)\right)\right);$$

$$(x^1(t),c,x(t))'=(x'^1(t),0,\left(x'^1(t),0,\left(e^{x'^1(t)}-1\right)\left(\frac{x'(t)}{x'^1(t)}-x(t)\right)\right);$$

$$(c,c,x(t))'=(0,0,\ x'(t)).$$

Правила дифференцирования векторных функций на растранные функции не распространяются. Например, $(c\rho(t))' \neq c\rho'(t)$; $(\rho(t)+\sigma(t))' \neq \rho'(t)+\sigma'(t)$.

В этом легко убедиться в результате непосредственной проверки.

Дифференцирование **W**-растранной функции используется для построения дифференциальной геометрии пространства на **W**-растране.

2 ВО-пространства с W-растраном

2.1 Определение пространства с W-растраном

ВО-пространства определяются в схеме Г. Вейля [1]. В качестве одуля Ли рассматриваем **W**-растран. Пусть дано Λ_W^3 – множество, элементы которого называются точками и обозначаются $A, B, ..., M, ...$ Каждой паре точек (A, B) ставится в соответствие единственный раст ρ из $\mathbf{P}_W^3$, пишем: $AB=\rho$. Выполняются аксиомы Г. Вейля:

1. Для всякой точки A и всякого раста ρ существует единственная точка B , что $AB=\rho$.

2. Для любых трех точек A, B, C , если $AB=\rho$, $BC=\sigma$, то $AC=\rho+\sigma$.

Множество точек Λ_W^3 называется **W**ЛМ-пространством. Точка $O\in\Lambda_W^3$ и базис **Б** образуют *репер* $\mathbf{B}=(O,\alpha,\beta,\gamma)$ ВО-пространства. Координатами точки M в репере **B** называются координаты раста OM в базисе **Б**. Если $OM=(x^1,x^2,x)$, то и $M=(x^1,x^2,x)$.

Пусть $A=(a^1,a^2,a)$, $B=(b^1,b^2,b)$ – произвольные точки из Λ_W^3 . Выполняется равенство $OA+AB=OB$, откуда получаем $AB=-OA+OB$:

$$AB=-\left(a^1,a^2,a\right)+\left(b^1,b^2,b\right)=\left(-a^1,-a^2,-ae^{-a^1-a^2}\right)+\left(b^1,b^2,b\right)=$$

$$=\left(b^1-a^1,b^2-a^2,b-ae^{b^1+b^2-a^1-a^2}\right).$$

Норма растов, введенная в п. 1.3, определяет в ВО-пространстве с $\mathbf{P}_W^3$ пространство-время с 2-мерным временем.

2.2 Прямые в WЛМ-пространстве

Получим параметрические уравнения прямой $p=\langle A,\rho\rangle$, заданной точкой $A=(a^1,a^2,a)$ и растом $\rho=(r^1,r^2,r)$. Прямая p есть множество точек $M=(x^1,x^2,x)$:

$$p=\{M \mid AM=t\rho,\ t\in\mathbf{R}\}.$$

На основе операций на $\mathbf{P}_W^3$ получим расты AM и $t\rho$:

$$AM=\left(x^1-a^1,x^2-a^2,x-ae^{x^1+x^2-a^1-a^2}\right);$$

$$t\rho=t\left(r^1,r^2,r\right)=\left(r^1t,r^2t,r\frac{e^{(r^1+r^2)t}-1}{e^{r^1+r^2}-1}\right).$$

Следовательно, прямая p описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x^1 = tr^1 + a^1, \\ x^2 = tr^2 + a^2, \\ x = r\left(e^{(r^1+r^2)t} - 1\right) \Big/ \left(e^{(r^1+r^2)} - 1\right) + ae^{(r^1+r^2)t}. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $r^1 + r^2 = 0$, тогда

$$\lim_{r^1+r^2\to 0} \frac{e^{(r^1+r^2)t} - 1}{e^{r^1-r^2} - 1} = \lim_{r^1+r^2\to 0} \frac{te^{(r^1+r^2)t}}{e^{r^1-r^2}} = t,$$

и система (3) принимает вид

$$\begin{cases} x^1 = tr^1 + a^1, \\ x^2 = tr^2 + a^2, \\ x = tr + a. \end{cases}$$

В этом случае прямая задается линейными уравнениями.

Прямые $p = \langle A, \rho \rangle$ и $q = \langle B, \rho \rangle$, имеющие общий ненулевой раст, называются *ко-параллельными*. Пусть раст σ неперестановочен с растом ρ. Тогда расты ρ и $\omega = -\sigma + \rho + \sigma$ независимы, т.е. ω не входит в оболочку $\langle \rho \rangle$. Прямые $p = \langle A, \rho \rangle$ и $v = \langle B, \omega \rangle$ называются *тран-параллельными.* Ко-параллельные и тран-параллельные прямые называются *параллельными.*

В общем случае через точку $B = (b^1, b^2, b) \in \Lambda^3_W$ можно провести прямые ко-параллельную и тран-параллельную прямой p. Для ко-параллельной прямой $q = \langle B, \rho \rangle$ имеем параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x^1 = tr^1 + b^1, \\ x^2 = tr^2 + b^2, \\ x = r\left(e^{(r^1+r^2)t} - 1\right) \Big/ \left(e^{(r^1+r^2)} - 1\right) + be^{(r^1+r^2)t}. \end{cases}$$

Для тран-параллельной прямой $v = \langle B, \omega \rangle$ найдем определяющий ее раст $\omega = -\sigma + \rho + \sigma$, где раст $\sigma = AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - ae^{b^1+b^2-a^1-a^2})$. Обозначая $\sigma = (s^1, s^2, s)$, получим

$$\omega = -\left(s^1, s^2, s\right) + \left(r^1, r^2, r\right) + \left(s^1, s^2, s\right) =$$

$$= \left(-s^1, -s^2, -se^{-s^1-s^2}\right) + \left(r^1 + s^1, r^2 + s^2, re^{s^1+s^2} + s\right) =$$

$$= \left(r^1, r^2, -se^{-s^1-s^2+r^1+s^1+s^2+r^2} + re^{s^1+s^2} + s\right) = \left(r^1, r^2, s\left(1 - e^{r^1+r^2}\right) + re^{s^1+s^2}\right).$$

Параметрические уравнения прямой $v = \langle B, \omega \rangle$, тран-параллельной прямой $p = \langle A, \rho \rangle$, имеют вид

$$\begin{cases} x^1 = tr^1 + b^1, \\ x^2 = tr^2 + b^2 \\ x = \left(\left(b - ae^{b^1+b^2-a^1-a^2} \right)\left(1 - e^{r^1+r^2}\right) + re^{b^1-a^1+b^2-a^2} \right) \dfrac{e^{(r^1+r^2)t} - 1}{e^{(r^1+r^2)} - 1} + \\ + be^{(r^1+r^2)t}. \end{cases}$$

Прямой, заданной линейными уравнениями, параллельна только одна прямая, содержащая точку B:

$$\begin{cases} x^1 = tr^1 + b^1, \\ x^2 = tr^2 + b^2, \\ x \;\, = tr + ab. \end{cases}$$

3 Правые сдвиги на W-растране

3.1 Правые сдвиги и матрицы

Построим матричную модель **W**-растрана. В $\mathbf{P}_W^3$ возьмем расты $\eta = (a^1, a^2, a)$ и $\xi = (b^1, b^2, b)$. Прибавим справа к произвольному расту $\rho = (x^1, x^2, x)$ фиксированный раст η:

$$\rho + \eta = \left(x^1 + a^1,\, x^2 + a^2, xe^{a^1+a^2} + a \right) = \left(x^{1'}, x^{2'}, x' \right).$$

Запишем это равенство растов в виде покомпонентных равенств:

$$\begin{cases} x^{1'} = x^1 + a^1, \\ x^{2'} = x^2 + a^2, \\ x' = xe^{a^1+a^2} + a. \end{cases} \tag{4}$$

Такими же формулами записываются аффинные преобразования 3-мерного аффинного пространства. Значит, правому сдвигу растрана $\mathbf{P}_W^3$ соответствует аффинное преобразование вида (4), всякому аффинному преобразованию соответствует его матрица. Тем самым, правому сдвигу π_η **W**-растрана растом η однозначно соответствует матрица

$$m_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & e^{a^1+a^2} \end{pmatrix}.$$

Правому сдвигу π_ξ **W**-растрана растом ξ соответствует матрица

$$m_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & e^{b^1+b^2} \end{pmatrix}.$$

Перемножим соответственные матрицы:

$$m_\xi m_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & e^{b^1+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & e^{a^1+a^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a^1+b^1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2+b^2 & 0 & 1 & 0 \\ a+be^{a^1+a^2} & 0 & 0 & e^{a^1+a^2+b^1+b^2} \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к расту ρ сумму $(\eta+\xi)$, т.е. запишем правый сдвиг $\pi_{\eta+\xi}$ **W**-растрана растом $(\eta+\xi)$:

$$\rho+(\eta+\xi) = \left(x^1+a^1+b^1,\, x^2+a^2+b^2, xe^{a^1+a^2+b^1+b^2}+ae^{b^1+b^2}+b \right).$$

Очевидно, матрица, соответствующая этому преобразованию $m_{\eta+\xi}$, совпадает с матрицей, полученной в результате умножения $m_\xi m_\eta$. Имеем следующее свойство матриц правых сдвигов на **W**-растране $\mathbf{P}_W^3$:

$$m_{\eta+\xi} = m_\xi m_\eta .$$

Следовательно, множество матриц $\mathbf{M}_W^3 = \left\{ m_\eta \middle| \eta \in \mathbf{P}_W^3 \right\}$ является группой относительно умножения матриц. Эта группа изоморфна группе $(\mathbf{R}^3,+)$, где сложение определено равенством (1). Определим возведение матрицы m_η в действительную степень t равенством

$$m_\eta^t = m_{t\eta},$$

где $t\eta$ задано равенствами (3). Этим задана внешняя операция $\omega_R(\cdot)$ на группе $\mathbf{M}_W^3 = (\mathbf{M}_W^3,\cdot)$. Относительно умножения матриц и возведения матриц в действительную степень множество матриц $\mathbf{M}_W^3 = \left\{ m_\eta \middle| \eta \in \mathbf{P}_W^3 \right\}$ является одулем Ли, изоморфным **W**-растрану $\mathbf{P}_W^3$, значит, $\mathbf{M}_W^3 = (\mathbf{M}_W^3, \cdot, \omega_R(\cdot))$ есть **W**-растран и $\mathbf{M}_W^3$ является матричной моделью **W**-растрана $\mathbf{P}_W^3$.

Таким образом, получено представление **W**-растрана матрицами.

3.2 W-растран и аффинные преобразования

Вместе с тем в п. 3.1 получена аффинная модель **W**-растрана $\mathbf{P}_W^3$. Правому сдвигу π_η **W**-растрана соответствует аффинное преобразование (4). Композиции таких аффинных преобразований соответствует произведение их матриц. Значит, аффинные преобразования вида (4) составляют подгруппу в группе аффинных преобразований пространства $\mathbf{A}^3$, и $\mathbf{P}_W^3$ имеет аффинное представление.

Заключение

Введенная в п. 1.3. галилеева метрика превращает **W**ЛМ-пространство в галилеево пространство с 2-мерным временем; геометрия пространства некоммутативна, т.к. оно определено на некоммутативной структуре – **W**-растране. Дифференцирование функций на **W**-растране позволяет развивать дифференциальную геометрию пространства с **W**-растраном, это составляет предмет будущих исследований.

Список литературы

1. **Долгарев, А. И.** ЛМ-пространство / А. И. Долгарев // Римановы пространства и методы эллиптических дифференциальных уравнений : межвузовский сборник научных трудов. – Л. : ЛГПИ, 1986. – С. 8–25.
2. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств : монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.